PROBEKLAUSUR 07/08

Aufgabe 3

Sei $U = \{2a + 3b + bT + aT^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[T]$.

2. Bestimmen Sie eine Basis von U.

Nachklausur 07/08

Aufgabe 3

Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 über $\mathbb{R}$.

Sei $U = \{a + bT + aT^2 + (a+b)T^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

2. Bestimmen Sie eine Basis von U.

ws 08/09

Aufgabe 3

Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$, und sei $W = M_{22}(\mathbb{R})$.

Sei $f : V \to W$ definiert durch $f(a_0 + a_1T + a_2T^2) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & 2a_2 \\ -a_2 & a_1 - a_0 \end{pmatrix}$ für alle $a_0 + a_1T + a_2T^2 \in V$.

2. Bestimmen Sie eine Basis von Bild(f).

ws 09/10

Aufgabe 3

Sei $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{23}(\mathbb{R})$ definiert durch $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+c & d \\ b & a+d & a \end{pmatrix}$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.

2. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

ws 10/11

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für alle $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ sei $\mathrm{Spur}(A)$ definiert durch $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, also die Summe der Diagonalelemente von A.

2. Bestimmen Sie eine Basis von $V_2 = \{A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Spur}(A) = 0\}$.

ws 14/15

Aufgabe 3

Ergänzen Sie

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$; zeigen Sie, dass Sie tatsächlich eine Basis gefunden haben.

[*6 Punkte*]

ss 16

Aufgabe 3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{34}(\mathbb{R}).$$

(a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ und bestimmen Sie eine Basis der Lösungsmenge.

(b) Ergänzen Sie Ihre in (a) gefundene Basis zu einer Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^4$.

ws 16/17

Aufgabe 3

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to M_{22}(\mathbb{R})$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b+c & a-b \\ 2a+c & 2b+c \end{pmatrix}$$

ist linear (was Sie nicht zu beweisen brauchen). Bestimmen Sie Kern(f) und Basen von Kern(f) und Bild(f).

[*12 Punkte*]

ws 18/19

Aufgabe 3

Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5 \,, \; f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \\ x_4 - x_3 \\ x_3 - x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear (was Sie nicht zu zeigen brauchen). Bestimmen Sie Basen von Kern(f) und Bild(f) und überprüfen Sie die Aussage des Rangsatzes.

[*10 Punkte*]

ss 19

2. Genau eine der beiden folgenden Mengen ist eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{R}^4$. Begründen Sie für beide Mengen, warum sie linear unabhängig bzw. linear abhängig sind.

(a) $$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

(b) $$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}.$$

[*6 + 6 = 12 Punkte*]